Dies ist der zweite Teil der Lösungen für die Probeklausur. Falls Unstimmigkeiten oder Fehler auffallen, bitte eine Mail an mich:
borinsky @ physik...

1 5 Gravitationsgesetz

1.1 Teil 1

Es gilt:

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Nach Newton 2 und $\vec{F}(r) = -\Delta V(r)$:

$$\vec{F}(r) = m\vec{g}(r) \qquad\qquad \vec{F}(r) = -\Delta V(r)$$

$$m\vec{g}(r) = -\Delta V(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{g}(r) = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$$

Mit g wie gewöhnlich in $\vec{e}_r$-Richtung betrachtet und $r = R$:

$$g = -G\frac{M}{R^2}$$

1.2 Teil 2

$$\begin{aligned}\vec{g}(r) &= -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{g}(R+h) &= -G\frac{M}{(R+h)^2}\vec{e}_r = \\ &= \vec{g}(R)\cdot\frac{R^2}{(R+h)^2}\end{aligned}$$

1.3 Teil 3

Dieser letzte Term lässt sich leicht in h entwickeln:

$$\begin{aligned}\frac{R^2}{(R+h)^2} &\approx \left.\frac{R^2}{(R+h)^2}\right|_{h=0} - 2\left.\frac{R^2}{(R+h)^3}\right|_{h=0} h = \\ &= 1 - 2\frac{h}{R}\end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\vec{g}(R+h) = \vec{g}(R) \cdot \left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

1.4 Teil 4

Es soll $|\vec{g}(R + h_0)| = 0.95 \cdot |\vec{g}(R)|$ sein. Mit $\vec{g}(R + h) = \vec{g}(R) \cdot \left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$ eingesetzt, ergibt sich:

$$\left(1 - 2\frac{h_0}{R}\right) = 0.95$$
$$\Rightarrow 0.025R = h_0$$

Da $R \approx 6400$ **km** ist $h_0 \approx 160$ **km**

Anmerkung: Natürlich existiert noch eine zweite Lösung, denn im inneren der Erde fällt g bis auf 0. Es existiert also eine negative Höhe h_0 bei der $g(R + h_0)$ auf 95% von $g(0)$ gefallen ist. Im Erdinneren spielt allerdings die Inhomogenität der Erde eine signifikante Rolle. Nimmt man die Erde (fälschlicherweise) als annähernd homogene Kugel an, kann man mittels des sogenannten Kugelschalentheorems die Schwerkraft innerhalb der Erde berechnen. In diesem Fall wirkt auf ein Testteilchen im Abstand r vom Mittelpunkt nur die Masse anziehend, die sich innerhalb der Kugel mit dem Radius r um den Mittelpunkt befindet. Man stellt fest, dass das daraus resultierende innere Schwerefeld linear abfällt. Unter dieser Betrachtung ergibt sich also die zweite Lösung:

$$\vec{g}(R) \propto R$$
$$\Rightarrow R + h_0 = 0.95R$$
$$\Rightarrow h_0 = -0.05R$$

1.5 Teil 5

R und M

2 6 Seilwinde

2.1 Teil 1

Am Kugellager wirkt eine Normalkraft von $F_N = (m + M)g$ daraus ergibt sich eine Haftreibungskraft von $F_R = \mu(m + M)g$ tangential zur Oberfläche der Rolle. Dadurch ergibt sich ein Drehmoment:

$$T_R = F_R r = \mu(m + M)gr$$

Da die Masse M zusätzlich an der Rolle zieht ergibt sich ein zweites Drehmoment:

$$T_G = F_G R = MgR$$

Die Haftreibung wirkt dem Drehmoment T_G entgegen und kompensiert dies solange $T_G < T_R$. Die größte Masse ohne Beschleunigung lässt sich also durch Gleichsetzen berechnen:

$$\begin{aligned} \mu(m + M_0)gr &= M_0 gR \\ \Rightarrow M_0 &= m\frac{\mu r}{R - \mu r} = m\frac{\mu}{\frac{R}{r} - \mu} \end{aligned}$$

Offensichtlich kann die Vorderung auch nur erfüllt werden, falls $\frac{R}{r} > \mu$. Im Fall $\frac{R}{r} \leq \mu$ ist es offensichtlich mit keiner beliebig großen Masse M möglich die Seilwinde zu bewegen.

2.2 Teil 2

Als erstes muss bei dieser Aufgabe das Trägsheitsmoment berechnet werden. Da die Masse homogen verteilt ist, gilt:

$$I = \int \rho r^2 d^3x = \int_r^R \int_0^{2\pi} \rho r^2 r d\phi dr dz$$

Das Integral lässt sich in Polarkoordinaten lösen. Die Integration über z führt man nicht aus.

$$\begin{aligned} I &= \int_r^R \int_0^{2\pi} \rho r^2 r d\phi dr dz = \\ &= 2\pi\rho\frac{R^4 - r^4}{4} dz = \rho\pi\frac{(R^2 + r^2)(R^2 - r^2)}{2} dz \end{aligned}$$

Das Volumen der Rolle ist $V = \pi(R^2 - r^2)dz$ (Differenz von zwei Kreisflächen mal Tiefe). Daraus ergibt sich:

$$\Rightarrow I = \frac{(R^2 + r^2)\rho V}{2} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$$

Über den Drehimpuls lassen sich hier schnell die Bewegungsgleichungen finden. Der Drehimpuls von der Mitte der Rolle aus betrachtet setzt sich zusammen aus:

Dem Drehimpulsbeitrag der Seilwinde: $L_{SW} = I\omega$
Dem Drehimpulsbeitrag der Masse M: $L_M = pR = MvR$

Das Drehmoment ist wie im ersten Teil $T_M = MgR$.

Aus

$$\frac{dL}{dt} = T$$

und $\omega R = v$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I\dot{\omega} + M\dot{v}R &= MgR \\
I\frac{\dot{v}}{R} + M\dot{v}R &= MgR \\
\Rightarrow \dot{v} &= \frac{MgR}{\frac{I}{R} + MR} = g\frac{MR^2}{I + MR^2} = \\
&= g\frac{MR^2}{\frac{m}{2}(R^2 + r^2) + MR^2}
\end{aligned}$$

3 7 Eisberge

3.1 Teil 1

Allgemein ist die Auftriebskraft:

$$F_A = V_{\text{unter}}\rho_{\text{Wasser}}g$$

und die Gewichtskraft (zum Beispiel für Eis):

$$F_G = -V\rho_{\text{Eis}}g$$

Für einen vollständig eingetauchten Körper ist $V_{\text{unter}} = V$. Deshalb ist die Gesamtkraft:

$$F = Vg(\rho_{\text{Wasser}} - \rho_{\text{Stoff}})$$

3.2 Teil 2

Bei einem ruhenden Eisberg gilt: $F_A + F_G = 0$ Also:

$$V_{\text{unter}} \rho_{\text{Wasser}} g = V \rho_{\text{Eis}} g$$
$$\Rightarrow \frac{V_{\text{unter}}}{V} = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{Wasser}}} \approx 90\%$$

4 8 Oszillator

Am Mittwoch

5 9 Helikopter

Es ist das erste Interferenzmaximum gesucht. Ein Interferenzmaximum ergibt sich, wenn die Phasenverschiebung zwischen der reflektierten und der nicht reflektierten Welle ein vielfaches von 2π ist.

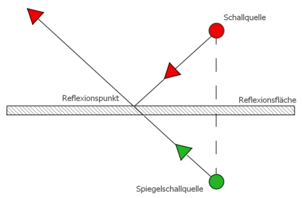

Abbildung 1: Schema der Schallreflektion

$$\Delta\phi = 2\pi n \qquad \Leftrightarrow \Delta s = n\lambda$$

Es wird angenommen, dass am Eis ein Phasensprung von π stattfindet. Der Wegunterschied der Wellenzüge ist bei einem Winkel von 30° und einer Höhe h vom Fuß bis zum Ohr:

$$\Delta s = h$$

Mit dem Phasensprung ergibt sich für das erste Interferenzmaximum:

$$h = \frac{\lambda}{2}$$
$$c = \lambda f$$
$$\Rightarrow f = \frac{c}{2h}$$

Mit $h \approx 1.7$ **m** ergibt sich $f \approx 100$ **Hz**.