1 1. Newtonsche Axiome

a) Trägheitsprinzip

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = 0$$

Kraft i auf Körper — Impulsableitung des Körpers

b) Aktionsprinzip

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \quad \Rightarrow \text{bzw. } \vec{F} \propto \vec{a} \text{ wenn } m = \text{const} \quad (\vec{F} = m\vec{a})$$

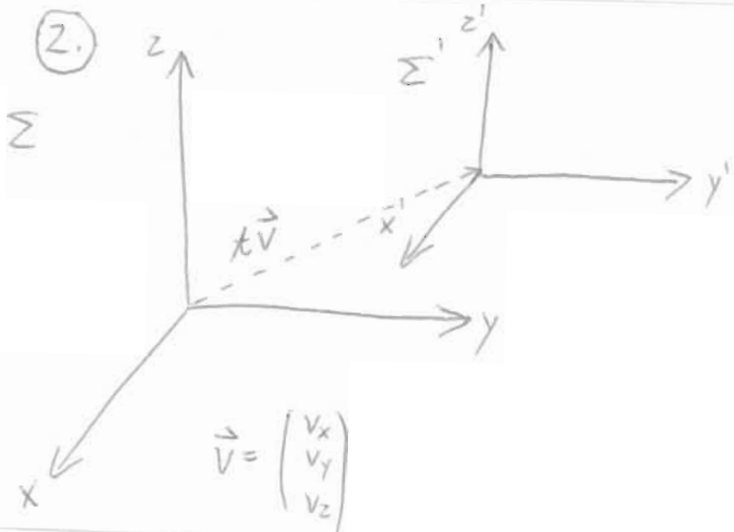
Änderung des Impulses — Beschleunigung

Kraft auf Körper

c) Reaktionsprinzip

$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ ($\vec{F}_{AB}$ ist die Kraft, welche von Körper A auf Körper B wirkt)

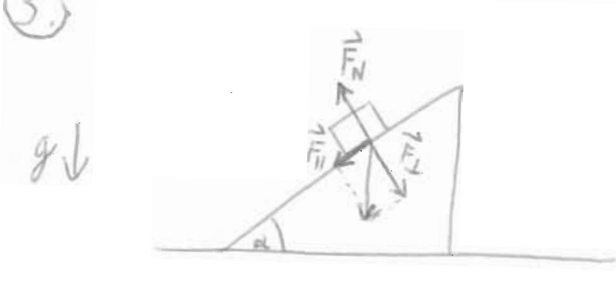
2.



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

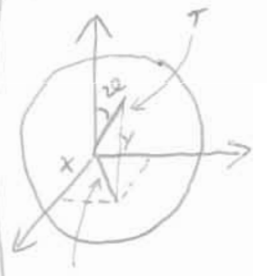
$$\Rightarrow \underbrace{\begin{aligned} x' &= x - v_x t \text{ bzw.} \\ y' &= y - v_y t \\ z' &= z - v_z t \\ t' &= t \end{aligned}}_{\text{spezielle Galilei-Transformation}} \quad \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad t' = t$$

3.



② 1. Gesamtmasse M:

$$M = \int \rho(\vec{r})\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0 \underbrace{(x^2+y^2)}_{=r^2 \sin^2\vartheta}\, r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$



$\sqrt{x^2+y^2}$ Projektion auf x-y-Ebene

$\sqrt{x^2+y^2} = r \sin\vartheta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2 \sin^2\vartheta$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{R} r^4\, dr}_{\left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^R = \frac{R^5}{5}} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta} = 2\pi \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{15}\pi R^5}}$$

Substitution

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2\vartheta}_{=(1-\cos^2\vartheta)} \cdot \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta}_{\substack{=-dx \\ \text{(Substitution)}}} \overset{\downarrow}{=} \int_1^{-1} (1-x^2)(-dx) = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

denn $\underline{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1}$

Integralgrenzen durch Vorzeichen vertauschen:

$\int_1^{-1} f(x)(-dx) = -\int_1^{-1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

Substitution: $x = \cos\vartheta$

$\Rightarrow dx = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

$\Rightarrow \cos^2\vartheta = x^2$

Integralgrenzen:

$x_1 = x(0) = \cos(0) = 1$

$x_2 = x(\pi) = \cos(\pi) = -1$

---

2. Der Schwerpunkt befindet sich in der Mitte der Kugel (bei (0,0,0) in unserem Koordinatensystem s.o.).

Begründung: Die Masse ist rotationssymmetrisch um die z-Achse verteilt (wegen (x^2+y^2)).

$\Rightarrow$ Schwerpunkt auf z-Achse!

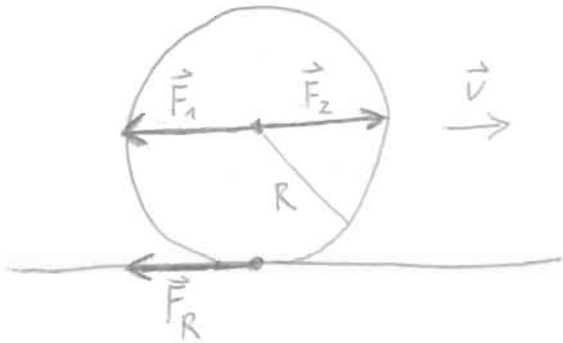
Die Masse ist spiegelsymmetrisch zur x-y-Ebene verteilt.

$\Rightarrow$ Schwerpunkt auf x-y-Ebene!

$\Rightarrow$ Schnittpunkt x-y-Ebene und z-Achse bei (0,0,0) bzw. in der Mitte der Kugel!

3 1.

Gleitreibung $F_R = \mu m g$



Wir ergänzen für unsere Betrachtungen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (mit $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$), die am Schwerpunkt angreifen, wobei $\vec{F}_1$ gerade $\vec{F}_R$ parallel verschoben ist ($\vec{F}_1 = \vec{F}_R$)

⇒ $\vec{F}_R$ und $\vec{F}_2$ bewirken gemeinsam ein Drehmoment bezogen auf den Schwerpunkt mit $\vec{M} = R\vec{F}_R$.

Beachte: Ein Drehmoment im Schwerpunktsystem besteht immer aus einer angreifenden Kraft (hier $\vec{F}_R$) und einer Gegen-Haltekraft am Schwerpunkt (hier $\vec{F}_2$).
Erst bewirkt eine Drehung!
(Bei einer Rolle wird die Haltekraft durch die Verankerung aufgebracht!) In diesem Fall gibt es keine „echte" Haltekraft, sodass wir durch Einführung von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ die Bewegung in Rotation (durch $\vec{F}_R$ und $\vec{F}_2$) und Translation (durch $\vec{F}_1$) zerlegen konnten. Da es keine „echte" Haltekraft gibt, kommt noch eine Änderung der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}$ durch $\vec{F}_1$ hinzu.

Folglich beginnt die Kugel zu rollen.

⇒ Durch $\vec{F}_1$ wirkt eine der Bewegung entgegen gerichtete Kraft am Schwerpunkt.
Folglich wird die Gleitbewegung abgebremst

⇒ Dies geht so lange bis die Kugel nur noch rollt und nicht mehr gleitet (keine Gleitreibung mehr, Rollreibung vernachlässigbar).

In diesem Fall gilt: $v = \omega R$ (reines Rollen)

Geschwindigkeit

Winkelgeschwindigkeit

(2.) Rotation:

$M = RF_R = \mu m g R$

$\underbrace{J \alpha}_{= \dot{\omega}(t)} = M \Rightarrow \dot{\omega}(t) = \frac{M}{J} \Rightarrow \omega(t) = \frac{M}{J} t + 0 = \frac{\mu \cancel{m} g R t}{\frac{2}{5} \cancel{m} R^{\cancel{2}}} = \underline{\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t}$ (1)

$J = \frac{2}{5} m R^2$

$+0$ durch Anfangsbedingung (Kugel gleitet)

Translation:

$F_1 = \mu m g$

Kraft wirkt entgegen von v_0 (Bremsung)

$\underbrace{m a}_{= \dot{v}(t)} = F_1 \Rightarrow \dot{v}(t) = \frac{-F_1}{m} \Rightarrow v(t) = \frac{-F_1}{m} t + v_0 = \frac{-\mu \cancel{m} g}{\cancel{m}} t + v_0 = \underline{-\mu g t + v_0}$ (2)

$+v_0$ durch Anfangsbedingung (Kugel gleitet)

Gesuchter Zeitpunkt t_0 mit <u>reinem</u> Rollen:

$\Rightarrow v(t_0) = R\omega(t_0)$ ← multipliziert mit R

Gleichsetzen (1) und (2):

$R\,\omega(t_0) = v(t_0)$

$\Downarrow$

$\cancel{R} \frac{5}{2} \mu g \frac{1}{\cancel{R}} t_0 = -\mu g t_0 + v_0 \Rightarrow v_0 = \underbrace{\left(\frac{5}{2} + 1\right)}_{\frac{7}{2}} \mu g t_0 \Rightarrow \underline{t_0 = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}}$

Wert: $\underline{\underline{t_0 = 0{,}49\,s}}$ (mit $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$)

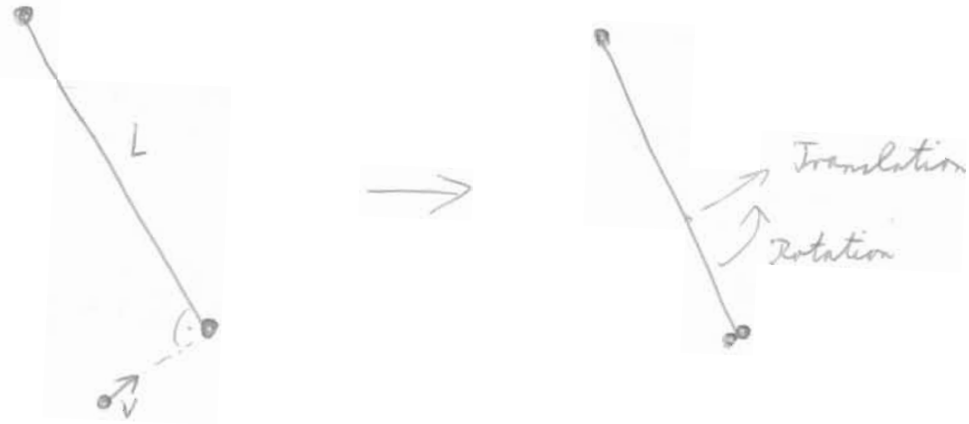
(3.) $v(t) = \dot{s}(t) \Rightarrow s(t_0) = \int_0^{t_0} v(t)\,dt = \int_0^{t_0} (-\mu g t + v_0)\,dt = \left[-\frac{\mu g}{2} t^2 + v_0 t\right]_0^{t_0} = -\frac{\mu g}{2} t_0^2 + v_0 t_0$

$\Rightarrow s(t_0) = -\frac{\mu g}{2} \left(\frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}\right)^2 + v_0 \left(\frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}\right)$

$= \frac{v_0^2}{\mu g} \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{4}^{2}}{49} + \underbrace{\frac{2}{7}}_{\frac{14}{49}}\right) = \frac{v_0^2}{\mu g} \underbrace{\left(\frac{-2 + 14}{49}\right)}_{\frac{12}{49}} = \underline{\frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}}$

Wert: $\underline{\underline{s = 2{,}08\,m}}$ (mit $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$)

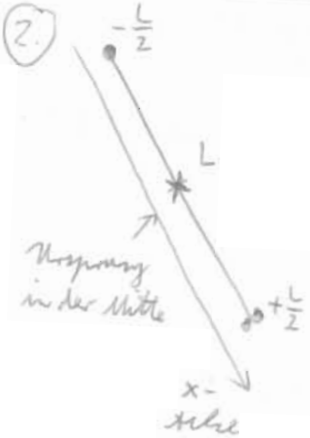
(4) Skizze:



(1) $E_{ges} = \frac{1}{2} m v^2$

Wert: $E_{ges} = 0{,}5\ J$

(2)



Schwerpunkt: $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Gesamtmasse

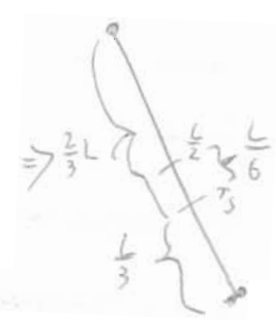
Einzelmassen

Ort der Massen

Hier: $r_S = \frac{1}{3m}\left(-\frac{L}{2} m + 2m\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{6}$

negative Position auf x-Achse

2 Massen am anderen Ende



(3) Impulserhaltung

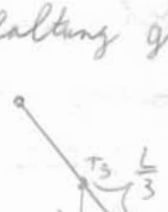
vorher $p = mv$

nachher $p' = 3mv'$ mit $p = p' \Rightarrow \cancel{m}v = 3\cancel{m}v' \Rightarrow v' = \frac{v}{3}$ Wert: $v' = 0{,}33\ \frac{m}{s}$

(4) Drehimpulserhaltung (bzgl. Schwerpunkt nach Auftreffen)

Achtung: Da wir die Winkelgeschwindigkeit nur um den Schwerpunkt bestimmen können, müssen wir auch schon vor Auftreffen bzgl. diesem Punkt rechnen. (Drehimpulserhaltung gilt immer bzgl. gleicher Punkte!)

vorher: $\mathcal{L} = m\frac{L}{3}v$ denn



$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$

$\vec{r} \times \vec{v}$ entspricht angreifendem „Hebel" (senkrechte Projektion)

nachher: $\mathcal{L}' = J\omega = \frac{2}{3} m L^2 \omega$

Trägheitsmoment für mehrere Punktmassen:

1 Masse

2 Massen

$J = \sum_i m_i r_i^2$ hier $J = \left(m\left(\frac{2}{3}L\right)^2 + 2m\left(\frac{L}{3}\right)^2\right) = mL^2\left(\frac{4}{9} + 2\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} mL^2$

Drehimpulse gleichsetzen:

$$\mathcal{L} = \frac{mL}{3} v \quad \text{mit } \mathcal{L} = \mathcal{L}' \Rightarrow \frac{m L}{3} v = \frac{2}{3} m L^2 w \Rightarrow w = \frac{v}{2L} \quad \text{Wert: } w = 0{,}5 \underbrace{\text{Hz}}_{1/s}$$
$$\mathcal{L}' = \frac{2}{3} m L^2 w$$

(5.) Gesamtenergie:

$$E'_{ges} = \underbrace{E'_{kin}}_{\frac{1}{2}\underbrace{3m}_{\text{Gesamtmasse}} v'^2} + \underbrace{E'_{rot}}_{\frac{1}{2} J w^2} = \frac{3}{2} m \left(\frac{v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m L^2\right)\left(\frac{v}{2L}\right)^2 = \frac{1}{6} m v^2 + \frac{1}{12} m v^2 = \frac{1}{4} m v^2 = \frac{1}{2} E_{ges}$$

$J = \frac{2}{3} m L^2$

Wert: $E'_{ges} = 0{,}25\,J$

Beim inelastischen Stoß wurde folglich die Hälfte der Energie E_{ges} in Wärme / Verformung umgewandelt! (denn $E'_{ges} = \frac{1}{2} E_{ges}$)

(6.) Wenn der Magnet senkrecht die Mitte der Stange trifft, trifft er genau den Schwerpunkt!

$\Rightarrow$ Impulserhaltung $\Rightarrow$ v' analog zu oben

$\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung $\Rightarrow$ $\mathcal{L} = 0$ bzgl. Schwerpunkt $\Rightarrow$ keine Rotation

$$\Rightarrow E'_{ges} = \underbrace{E'_{kin}}_{\text{wie oben}} + \underbrace{0}_{\text{keine Rotationsenergie}} = \frac{1}{6} m v^2 = \frac{1}{3} E_{ges} \quad \text{Wert: } E'_{ges} = 0{,}17\,J$$

$\Rightarrow$ Das ist interessant:

Wenn ein inelastischer Stoß zentral auf den Schwerpunkt stattfindet, geht mehr Energie verloren (wird in Wärme / Verformung umgewandelt). Denn so wird keine Energie in Rotationsenergie umgewandelt.