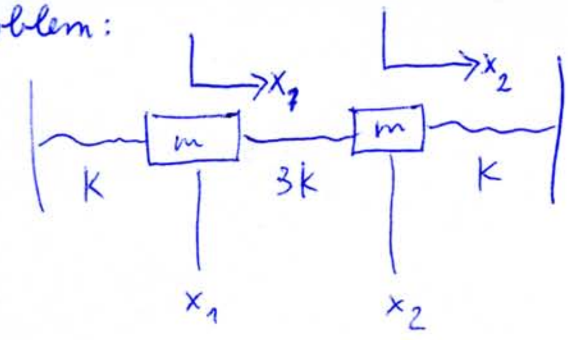
Problem:




Ergänzung zum Tutorium vom 04.02.201

Zwei Massen (m) sind mittels Federn gekoppelt. Sie sind dabei zwischen zwei Wänden befestigt, welche fest sind.
Die Federkonstanten sind dabei $K$, $3K$ und $K$

Lösen Sie die Bewegungsgleichung!

Lucas Hackl, 4.2.11

$$F_1 = m\ddot{x}_1 \,,\; F_2 = m\ddot{x}_2$$

$$F_1 = -kx_1 + (x_2 - x_1)3k$$

$$F_2 = -kx_2 + (x_1 - x_2)3k$$

$\rightsquigarrow$ rücktreibende Kraft

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{DGL}\\ m\ddot{x}_1 = -4kx_1 + 3kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -4kx_2 + 3kx_1\end{array} \longrightarrow m\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} k\vec{x} \qquad (1)}$$

Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte:

$$\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (4+\lambda)^2 - 9 = 16 + 8\lambda + \lambda^2 - 9$$

$$= 7 + 8\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-7} = -4 \pm \sqrt{9} = -4 \pm 3 \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -7\end{array}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4-\lambda_1 & 3 \\ 3 & -4-\lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -7 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4-\lambda_2 & 3 \\ 3 & -4-\lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basenwechsel:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = f_1(t)\,\vec{v}_1 + f_2(t)\,\vec{v}_2 = f_1(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + f_2(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrise ist bzgl. der Eigenvektoren diagonal!

$\Rightarrow$ für $\vec{x}(t) = f_1(t)\vec{v}_1 + f_2(t)\vec{v}_2$ gilt

$$m\begin{pmatrix} \ddot{f}_1(t) \\ \ddot{f}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} k \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ DGL sind entkoppelt

DGL $\quad m\ddot{f}_1(t) = k\,\lambda_1\,f_1(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{f}_1(t) = \frac{k\lambda_1}{m} f_1(t)$

$\quad m\ddot{f}_2(t) = k\,\lambda_2\,f_2(t) \qquad \ddot{f}_2(t) = \frac{k\lambda_2}{m} f_2(t)$

Frequenz der Oszillatoren: $\omega_i^2 = -\frac{k\lambda_i}{m}$ $\quad (\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -7)$ $\qquad (2)$

konkret: $m\ddot{f}_1(t) = -k f_1(t)$, $m\ddot{f}_2(t) = -7k f_2(t)$ $\rightarrow$ $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{7k/m}$

$\Downarrow$ führt zu bekannter DGL für $f_i(t)$

$$\ddot{f}_i(t) = -\omega_i^2 f_i(t) \xrightarrow[\text{Lösung}]{\text{bekannte}} f_i(t) = A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t) \qquad (3)$$

$A_i, B_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1(t) = A_1 \sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$

$\Rightarrow f_2(t) = A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{7k}{m}}\,t\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{7k}{m}}\,t\right)$

(Aber wir wollen $\vec{x}(t)$ wissen und nicht $\vec{f}(t)$!
$\Rightarrow$ Rücktransformation mittels Basenwechsel)

Wir erinnern uns

$\vec{x}(t) = f_1(t)\,\vec{v}_1 + f_2(t)\,\vec{v}_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} A_1 \sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{7k/m}\,t\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{7k}{m}}\,t\right) \\ -A_1 \sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + (-B_1)\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{7k}{m}}\,t\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{7k}{m}}\,t\right) \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten $A_1, A_2, B_1, B_2$ sind freie Parameter!