

Zelluläre Automaten

Ben Hörz

Institut für Physik, HU Berlin

7. Februar 2011

Gliederung

1 Motivation und formale Definition

- Definition
- Anwendungen

2 Beispiele

- Wolframs Automaten
- Game of Life
- Hydrodynamik (FHP)

3 Zusammenfassung und Ausblick

4 Literatur



Definition

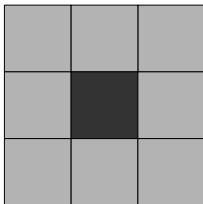
Zellulärer Automat beschrieben durch [KVV97]

- (Euklidisches) Gitter $R = \mathbb{Z}^d$
- endliche Zustandsmenge Q
- endliche Nachbarschaft $N \subset R$
- lokale Übergangsfunktion $\delta : N \rightarrow Q$

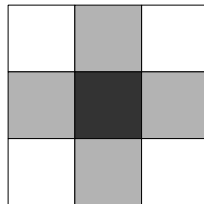
Beispiel für Zustandsmenge: $Q = \{0, 1\}$ (binärer Automat)

Übliche Nachbarschaftstypen

Moore-Nachbarschaft



von Neumann-Nachbarschaft





- Untersuchung im Rahmen der Automatentheorie
- Untersuchung von Selbstorganisation und Strukturbildung
- Umsetzung einfacher Verkehrs- und Evakuierungsmodelle
- Simulation physikalischer Systeme
 - Räuber-Beute-Modell (*Wator*)
 - einfache Elektronikmodelle / logische Schaltungen (*Wireworld*)
 - Fluiddynamik

Zelluläre Automaten sind per Konstruktion gut parallelisierbar.

Eindimensionaler binärer
Automat (mit periodischen
Randbedingungen).

Sei $a_i^{(t)}$ die Zelle i zum
Zeitschritt t mit Nachbarschaft
 $\{a_{i-r}^{(t)}, a_{i-r+1}^{(t)}, \dots, a_i^{(t)}, \dots, a_{i+r}^{(t)}\}$
von Reichweite r .

Für $r = 1$, rule 30

$a_{i-1}^{(t)}$	$a_i^{(t)}$	$a_{i+1}^{(t)}$	$a_i^{(t+1)}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

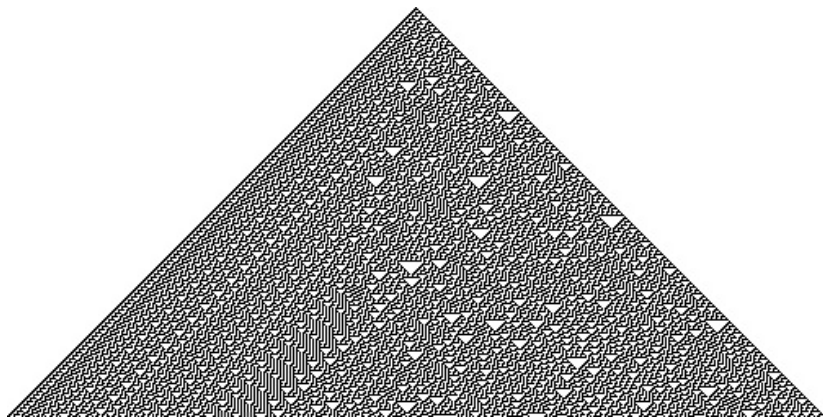
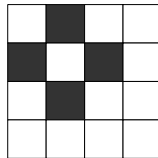
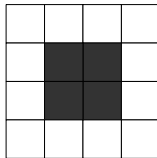
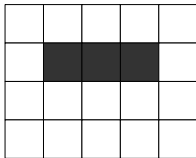


Abbildung: Die ersten 250 Iterationen gemäß Rule 30. Rule 30 zeigt chaotisches Verhalten und wird als Zufallszahlengenerator für große Integer in Mathematica genutzt. [Wol02]

Zweidimensionaler zellulärer Automat (mit periodischen Randbedingungen), mit den Regeln für Moore-Nachbarschaft (Conway):

- Eine lebende Zelle bleibt am Leben, wenn sie zwei oder drei lebende Nachbarn hat, sonst stirbt sie.
- Eine zuvor tote Zelle wird bevölkert, wenn sie genau drei lebende Nachbarn hat.



Zelluläre Automaten als Diskretisierung partieller Differentialgleichungen

Betrachte

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Diskretisierung in Raum und Zeit liefert

$$C_i^{(t)} = C_i^{(t-1)} + \frac{\Delta t \cdot \kappa}{(\Delta x)^2} \left[C_{i+1}^{(t-1)} - 2C_i^{(t-1)} + C_{i-1}^{(t-1)} \right]$$

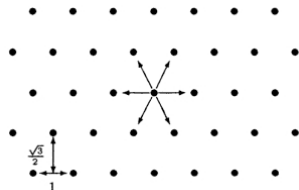
Aber: Unendliche Zustandsmenge, Stabilitätsprobleme, Erhaltungsgrößen

Für trianguläres Gitter mit Gittervektoren $\vec{c}_i = (c_{i1}, c_{i2})$ gilt:

$$\sum_i \vec{c}_i = 0$$

$$\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = 3\delta_{\alpha\beta}$$

$$\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = 0$$





- Fluiddynamik-Automaten werden meistens in den neuen Zustand überführt, indem zunächst Kollisionen nach definierten Regeln stattfinden, und die Teilchen dann zu benachbarten Knoten propagieren.
- Mikroskopisch müssen bei Kollisionen Impuls und Masse Erhaltungsgrößen sein. Weitere mikroskopische Erhaltungsgrößen erzeugen makroskopisch unphysikalisches Verhalten und heißen daher *spurious invariants*.
- Das zugrundeliegende Gitter muss eine ausreichende Symmetrie aufweisen, damit der zelluläre Automat makroskopisch die *Navier-Stokes-Gleichungen* reproduziert. [WG00]

$$\nabla \vec{u} = 0$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla p$$

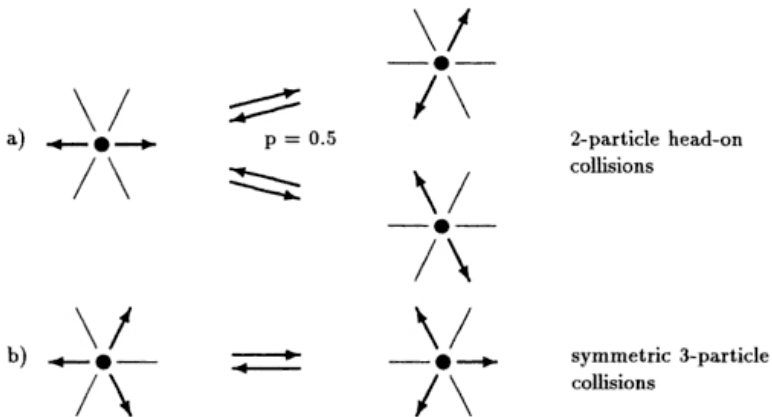


Abbildung: Kollisionsregeln im FHP-I-Modell. Die nichtdeterministische Regel (a) sichert Parität (Invarianz unter Spiegelung), (b) beseitigt die *spurious invariant* Differenz der entgegengesetzt bewegenden Partikel.[WG00]

Insbesondere gilt für Anfangs- und Endzustände s, s'

$$s = \{s_i, i = 1 \dots 6\}$$

offensichtlich die *detailed balance*

$$A(s \rightarrow s') = A(s' \rightarrow s)$$

für die Übergangswahrscheinlichkeiten $A(s \rightarrow s')$.



Wichtige Observable sind die Massen- und Impulsdichte, die über die *mittlere Besetzungsdichte* N_i definiert werden.

$$\rho = \sum_i N_i(t, \vec{r})$$

$$\vec{j} = \sum_i \vec{c}_i N_i(t, \vec{r})$$

Insbesondere implizieren die mikroskopischen Erhaltungsgrößen auch die Erhaltung der gemittelten Größen:

$$\sum_i N_i(t+1, \vec{r} + \vec{c}_i) = \sum_i N_i(t, \vec{r}) \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{c}_i N_i(t+1, \vec{r} + \vec{c}_i) = \sum_i \vec{c}_i N_i(t, \vec{r}) \quad (2)$$



Im Gleichgewicht folgt die mittlere Besetzungsdichte der Fermi-Dirac-Verteilung[FdH⁺86]

$$N_i^{(0)} = \frac{1}{1 + \exp(h + \vec{q} \cdot \vec{c}_i)}$$

mit noch unbestimmten $h \in \mathbb{R}$ und $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ (*exclusion principle*).
Für kleine Geschwindigkeiten \vec{u} findet man durch Entwicklung in \vec{u} :

$$N_i^{(0)}(\rho, \vec{u}) = \frac{\rho}{6} + \frac{\rho}{3} \vec{c}_i \cdot \vec{u} + \rho G(\rho) Q_{i\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \mathcal{O}(u^3)$$

wobei

$$G(\rho) = \frac{1}{3} \frac{6 - 2\rho}{6 - \rho}$$

$$Q_{i\alpha\beta} = c_{i\alpha} c_{i\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$$

Herleitung der makroskopischen Gleichungen durch Multiskalenanalyse. Initialisierung der Massen- und Impulsdichten auf großer räumlicher Skala $L = \epsilon^{-1}|c_j|$ mit $\epsilon \ll 1$. Dann gibt es drei charakteristische Zeitskalen:

- Relaxation ins Gleichgewicht auf Skala ϵ^0
- Störungen der Massendichte (Advektion) auf Skala ϵ^{-1}
- Diffusion, viel langsamer als sound waves auf Skala ϵ^{-2}

Dies legt die Einführung dreier Zeitvariablen nahe:

t_* diskret

$$t_1 = \epsilon t_*$$

$$t_2 = \epsilon^2 t_*$$

Dementgegen gibt es nur zwei räumliche Skalen.

Die tatsächlichen mittleren Besetzungsdichten werden um ihre lokale Gleichgewichtsdichte entwickelt (störungstheoretischer Ansatz - *Chapman-Enskog-Entwicklung*):

$$N_i = N_i^{(0)}(t, \vec{r}) + \epsilon N_i^{(1)}(t, \vec{r}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Außerdem:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \vec{c}_i \end{array} \right\} N_i(t+1, \vec{r} + \vec{c}_i) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \vec{c}_i \end{array} \right\} [N_i(t, \vec{r}) + \partial_t N_i + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha} N_i + \mathcal{O}(\partial^2 N_i)]$$

Die schnelle Relaxation wird in der Beschreibung vernachlässigt.
Dies legt die Ersetzungen

$$\begin{aligned}\partial_t &\rightarrow \epsilon \partial_t^{(1)} + \epsilon^2 \partial_t^{(2)} \\ \partial_{x_\alpha} &\rightarrow \epsilon \partial_{x_\alpha}^{(1)}\end{aligned}$$

nahe. Die Erhaltungsgleichungen (1) und (2) liefern dann

$$\begin{aligned}&\sum_i \left\{ \frac{1}{\vec{c}_i} \right\} [N_i(t+1, \vec{r} + \vec{c}_i) - N_i(t, \vec{r})] = 0 \\ &= \sum_i \left\{ \frac{1}{\vec{c}_i} \right\} [\epsilon \partial_t^{(1)} N_i^{(0)} + \epsilon c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} N_i^{(0)} + \epsilon^2 \partial_t^{(2)} N_i^{(0)} + \epsilon^2 \partial_t^{(1)} N_i^{(1)} + \\ &\quad + \epsilon^2 c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} N_i^{(1)} + \epsilon^3 \partial_t^{(2)} N_i^{(1)}]\end{aligned}$$



In Ordnung ϵ^1 folgt:

$$\begin{aligned} \partial_t^{(1)} \overbrace{\sum_i N_i^{(0)}}{=\rho} + \partial_{x_\beta} \overbrace{\sum_i c_{i\beta} N_i^{(0)}}{=j_\beta} &= 0 \\ \partial_t^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} N_i^{(0)} + \partial_{x_\beta} \underbrace{\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} N_i^{(0)}}_{=P_{\alpha\beta}} &= 0 \end{aligned}$$

oder mit $\vec{j}(t, \vec{r}) = \rho(t, \vec{r}) \vec{u}(t, \vec{r})$

$$\begin{aligned} \partial_t^{(1)} \rho + \partial_{x_\beta} (\rho u_\beta) &= 0 \\ \partial_t^{(1)} (\rho u_\alpha) + \partial_{x_\beta} P_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\beta}^{(0)} &\equiv \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} N_i^{(0)} \\
 &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \left(\frac{\rho}{6} + \frac{\rho}{3} \vec{c}_i \cdot \vec{u} + \rho G(\rho) Q_{i\gamma\delta} u_\gamma u_\delta \right) \\
 &= \frac{\rho}{2} \delta_{\alpha\beta} + \rho G(\rho) \underbrace{\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} Q_{i\gamma\delta} u_\gamma u_\delta}_{T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\text{MA})}}
 \end{aligned}$$

$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\text{MA})}$ heißt Impuls-Advektionstensor (*Momentum Advection tensor*) und hängt vom zugrundeliegenden Gitter ab.



Definition

Ein Tensor n -ter Stufe $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ heißt isotrop, wenn er invariant unter beliebigen orthogonalen Transformationen O ist.

Theorem

- *Es existiert kein isotroper Tensor erster Stufe.*
- *Ein isotroper Tensor zweiter Stufe ist proportional zu $\delta_{\alpha\beta}$.*
- *Ein isotroper Tensor dritter Stufe ist proportional zu $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$.*
- *Es gibt genau drei linear unabhängige Tensoren vierter Stufe:*

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \quad \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} \quad \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$$

[Jef31]

Der Impuls-Advektionstensor des triangulären Gitters ist isotrop. Im makroskopischen Grenzfall liefert der FHP-Automat also die Navier-Stokes-Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\text{MA})} &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} Q_{i\gamma\delta} \\
 &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \left(c_{i\gamma} c_{i\delta} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma\delta} \right) \\
 &= \frac{3}{4} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta})
 \end{aligned}$$

FHP und *real world* Impuls-Advektionstensor

$$P_{xx}^{(0)} = \rho G(\rho)(u^2 - v^2) + \frac{\rho}{2}$$

$$P_{yy}^{(0)} = \rho G(\rho)(v^2 - u^2) + \frac{\rho}{2}$$

$$P_{xy}^{(0)} = P_{yx}^{(0)} = \rho G(\rho)2uv$$

$$P_{xx} = \rho u^2 + p$$

$$P_{yy} = \rho v^2 + p$$

$$P_{xy} = P_{yx} = \rho uv$$

Dies legt Identifizierung des Druckes $p = \frac{\rho}{2}(1 - g(\rho)\bar{u}^2)$ nahe.

Dann:

$$P_{xx}^{(0)} = \rho g(\rho) u^2 + p$$

$$P_{yy}^{(0)} = \rho g(\rho) v^2 + p$$

$$P_{xy}^{(0)} = P_{yx}^{(0)} = \rho g(\rho) uv$$

Nach Reskalierung der Zeit $t \rightarrow \frac{t}{g(\rho)}$ folgt für inkompressible Flüssigkeiten der Dichte ρ_0 :

$$\nabla \vec{u} = 0$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla P$$

mit kinematischem Druck

$$P = \left(\frac{\rho}{2\rho_0 g(\rho_0)} - \vec{u}^2 \right)$$

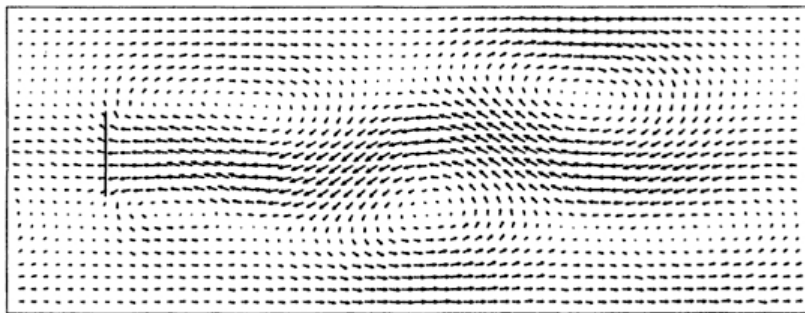


Abbildung: Strömung um eine Scheibe im FHP-II Modell nach Initialisierung mit homogener Strömung mit $u = 0.2$. Gitter aus $4096 \diamond 1792$ Knoten nach 260000 Zeitschritten.[WG00]

- Effizient implementierbar (endliche Zustandsmenge ermöglicht oft Implementierung mit Bitoperationen)
- Parallele Programmierung
- Fluiddynamik
 - Nichttriviale Suche nach *spurious invariants*
 - Neben Erhaltungsgrößen ist die Symmetrie des zugrundeliegenden Gitters wichtig.
 - Erweiterung auf dreidimensionales Modell nur auf vierdimensionalem Gitter möglich
- Wolframs Automaten
 - Zeigen vier verschiedene Klassen von Strukturbildung
 - Universum als zellulärer Automat?



U. Frisch, D. d'Humieres, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and JP Rivet.

Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions.

Technical report, 1986.



H. Jeffreys.

Cartesian tensors.

1931.



M. Kutrib, R. Vollmar, and T. Worsch.

Introduction to the special issue on cellular automata.

Parallel Computing, 23(11):1567–1576, 1997.



D.A. Wolf-Gladrow.

Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction.

Springer Verlag, 2000.



Stephen Wolfram.

A New Kind of Science.

Wolfram Media, 2002.