Ausgewählte Kapitel der Theoretischen Physik

# Die Lorentz- und Poincaré-Gruppe in der Elementarteilchenphysik

# Gliederung

- 1. Motivation und Klärung grundlegender Begriffe
- 2. Die Lorentz-Gruppe
- 3. Die Poincaré-Gruppe

# 1. Motivation und Klärung grundlegender Begriffe

- Symmetrien schränken Freiheitsgrade in der Naturbeschreibung ein

- Noether-Theorem zeigt uns:

  Symmetrien $\Leftrightarrow$ Erhaltungsgrößen

$\Rightarrow$ Müssen Symmetrien in der Konstruktion von Lagrange-Dichten berücksichtigen

Für uns von Interesse:

- Homogenität und Isotropie des Raumes (Translations- und Rotationsinvarianz)
- Spezielles Relativitätsprinzip (Boostinvarianz)

## Gruppe $(G, \bullet)$

Es muss gelten:

- $G$ ist abgeschlossen bzgl. $\bullet$
- Assoziativität: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) = a \bullet b \bullet c$
- Inverses Element $a^{-1}$ ist enthalten
- Neutrales Element $e$ ist enthalten

## Lie-Gruppe

- $G$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit
- $\dim(G,\bullet) = \dim(G)$
- erlaubt Beschreibung von kontinuierlichen Transformationen

Bsp.: Drehgruppe

## Darstellung einer Gruppe

Homomorphe Zuordnung $g \in G \to D(g)$ einer Abbildung $D: V \to V$ zu einem Gruppenelement

irreduzible Darstellung: Es existiert kein Teilraum von $V$, der auf sich selbst abgebildet wird

## Casimir-Operator

- Operator $C$, der mit allen Erzeugenden einer Darstellung kommutiert

$\Rightarrow$ $C$ bleibt unter Transformation invariant

$$\boxed{\text{Wir sagen: Eigenwerte beschreiben Observablen, die Teilchen klassifizieren}}$$

- Bsp.: Drehimpulsoperator $\hat{L}^2$

# 2. Die Lorentz-Gruppe

- Minkowski: Lorentz-Transformationen lassen Norm eines Vektors invariant

- Bestimmungsgleichung:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

wobei $\eta$ für die Minkowski-Metrik steht

In der Operator-Darstellung:

$$L_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right)$$

Ist Erzeugende der Lorentz-Transformation in der Operator-Darstellung

Allgemeinster Fall: $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$

$S_{\mu\nu}$ hat keinen Einfluss auf die Transformation skalarer Felder, aber bei Vektorfeldern

$$\Rightarrow \left(S_{\rho\sigma}\right)_{\mu}^{\nu} = i\left(\eta_{\rho\mu}\delta_{\sigma}^{\nu} - \eta_{\sigma\mu}\delta_{\rho}^{\nu}\right)$$

Wir nennen den neuen Operator Spin-Operator

- Eigenwerte *n(n+1)* und *m(m+1)* der Casimir-Operatoren

$$\overrightarrow{T_{\pm}}^{2} = T_{\pm}^{1\,2} + T_{\pm}^{2\,2} + T_{\pm}^{3\,2}$$

charakterisieren Elementarteilchen nach ihrem Drehimpuls:

$$j = n + m$$

# 3. Ponicaré-Gruppe

Erweiterung der Lorentz-Gruppe um die Translations-Gruppe

$$P: x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

Verknüpfungsrelation:

$$(\Lambda_2, a_2) \bullet (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

Zwei neue Casimir-Operatoren:

- 1. $P^2 = P_\mu P^\mu$ : Quadrat des Impulsvektors
- 2. $W^2 = W_\mu W^\mu$ mit $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}$ :

Quadrat des Pauli-Lubanski-Vektor
(relativistische Verallgemeinerung des Spins)

## Irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe

- 1. Massive Darstellung mit $P^2 = m^2c^2 > 0$ :
  Teilchen durch Masse und Spin charakterisiert
- 2. Masselose Darstellung mit $P^2 = 0$
  Teilchen durch Masse und Helizität charakterisiert
- 3. Tachyonen und Teilchen mit kontinuierlichem Spin
  (nicht realisiert)

# Quellen


- Field Theory: A Modern Primer (Ramond)
- Supersymmetrie (Kalka, Soff)
- Quantum Field Theory (Weinberg)
- Spezielle Relativitätstheorie (Goenner)

# Infinitesimale Lorentz-Transformation in der Tensor-Darstellung

Bsp.:

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & 0 & 0 & \sinh(\eta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\eta) & 0 & 0 & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \rightarrow \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Infinitesimale Lorentz-Transformation in der Tensor-Darstellung

Allgemeine Form: $\left(L^{\mu\nu}\right)^{\rho}_{\sigma} = i\left(\eta^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} - \eta^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}\right)$

mit $L_{ij} = -2i\varepsilon_{ijk}D_k$ und $L_{0\mu} = -L_{\mu 0} = -i\Lambda_{\mu}$

Lorentz-Transformation als Limes:

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{i}{2n}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right)^{n} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right)$$