

# Topologie und Instantonen

## Das nicht-lineare $O(3)$ $\sigma$ -Modell

Gregor Richter  
Betreuer: Prof. Dr. Müller-Preußker

Institut für Physik  
Humboldt-Universität zu Berlin

07. Februar 2011

- 1 Das nicht-lineare  $O(3)$   $\sigma$ -Modell
  - Das Modell
  - Motivation
  - Vorbetrachtungen

- 1 Das nicht-lineare  $O(3)$   $\sigma$ -Modell
  - Das Modell
  - Motivation
  - Vorbetrachtungen
- 2 Instantonen des nicht-linearen  $O(3)$   $\sigma$ -Modells

- 1 Das nicht-lineare  $O(3)$   $\sigma$ -Modell
  - Das Modell
  - Motivation
  - Vorbetrachtungen
- 2 Instantonen des nicht-linearen  $O(3)$   $\sigma$ -Modells
- 3 Homotopie-Gruppen: Ein kurzer Abriß
  - Die Fundamentalgruppe
  - Nützliche Theoreme
  - Höhere Homotopiegruppen

- 1 Das nicht-lineare  $O(3)$   $\sigma$ -Modell
  - Das Modell
  - Motivation
  - Vorbetrachtungen
- 2 Instantonen des nicht-linearen  $O(3)$   $\sigma$ -Modells
- 3 Homotopie-Gruppen: Ein kurzer Abriß
  - Die Fundamentalgruppe
  - Nützliche Theoreme
  - Höhere Homotopiegruppen
- 4 Fazit

- 1 Das nicht-lineare  $O(3)$   $\sigma$ -Modell
  - Das Modell
  - Motivation
  - Vorbetrachtungen
- 2 Instantonen des nicht-linearen  $O(3)$   $\sigma$ -Modells
- 3 Homotopie-Gruppen: Ein kurzer Abriß
  - Die Fundamentalgruppe
  - Nützliche Theoreme
  - Höhere Homotopiegruppen
- 4 Fazit
- 5 Literatur

Betrachte:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Betrachte:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Lagrangian des Systems:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 (\partial_{\mu} \phi^a(x)) (\partial^{\mu} \phi^a(x))$$



Betrachte:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Lagrangian des Systems:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \phi^a(x)) (\partial^\mu \phi^a(x))$$

Nebenbedingung:

$$\sum_{a=1}^3 (\phi^a(x))^2 = 1$$

Betrachte  $\mathcal{L}$  auf diskretisiertem Raum:

$$\begin{aligned} \sum_{x,\mu} (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{x,\mu} \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \\ &\rightarrow \sum_{x,\mu} (\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}}^2 + \mathbf{n}_x^2 + 2\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x) \\ &= 2N + 2 \sum_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x \end{aligned}$$

Betrachte  $\mathcal{L}$  auf diskretisiertem Raum:

$$\begin{aligned}
 \sum_{x,\mu} (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{x,\mu} \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \\
 &\rightarrow \sum_{x,\mu} (\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}}^2 + \mathbf{n}_x^2 + 2\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x) \\
 &= 2N + 2 \sum_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x \\
 H &= c \sum_{\langle x,y \rangle} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y
 \end{aligned}$$

Betrachte  $\mathcal{L}$  auf diskretisiertem Raum:

$$\begin{aligned}
 \sum_{x,\mu} (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{x,\mu} \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \\
 &\rightarrow \sum_{x,\mu} (\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}}^2 + \mathbf{n}_x^2 + 2\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x) \\
 &= 2N + 2 \sum_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x \\
 H &= c \sum_{\langle x,y \rangle} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Heisenberg Hamiltonian (ohne externes Magnetfeld)

Betrachte  $\mathcal{L}$  auf diskretisiertem Raum:

$$\begin{aligned} \sum_{x,\mu} (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{x,\mu} \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \left( \frac{\mathbf{n}(x + \hat{\mu}) - \mathbf{n}(x)}{a} \right) \\ &\rightarrow \sum_{x,\mu} (\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}}^2 + \mathbf{n}_x^2 + 2\mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x) \\ &= 2N + 2 \sum_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\hat{\mu}} \cdot \mathbf{n}_x \\ H &= c \sum_{\langle x,y \rangle} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Heisenberg Hamiltonian (ohne externes Magnetfeld)

$\Rightarrow$  nicht-lineares O(3)-Modell ist Kontinuums-Limes des 2D  
Ferromagneten

Im Folgenden  $\phi := (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$

### Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} = 0$$

$$S_E[\phi] = E[\phi] = \frac{1}{2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \lambda(\phi^2 - 1)]$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + \lambda)\phi = 0$$

$$\lambda = -\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

## Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^a - \left( \sum_b \phi^b \partial_\mu \partial^\mu \phi^b \right) \phi^a = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichungen werden durch Variation der (euklid.) Wirkung hergeleitet

$\Rightarrow$  Lösungen der Bewegungsgleichungen haben extremale (euklid.) Wirkung

Betrachten nur  $\phi$  mit endlicher Energie / euklid. Wirkung  
In Polarkoordinaten:

$$r \|\text{grad} \phi\| \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty$$
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(x) = \phi^{(0)}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2$  wird kompaktifiziert zu  $S^2_{(phy)}$

Aufgrund der Nebenbedingung liegt  $\phi$  auf  $S^2$

$$\Rightarrow S^2_{(phy)} \xrightarrow{\phi} S^2_{(int)}$$



Für Abbildungen von  $S^2$  auf  $S^2$  gilt:

Für Abbildungen von  $S^2$  auf  $S^2$  gilt:

- lassen sich in disjunkte Homotopieklassen einteilen (Homotopie ist Äquivalenzrelation)

Für Abbildungen von  $S^2$  auf  $S^2$  gilt:

- lassen sich in disjunkte Homotopieklassen einteilen (Homotopie ist Äquivalenzrelation)
- Abbildungen innerhalb einer Homotopieklasse lassen sich stetig ineinander verformen

Für Abbildungen von  $S^2$  auf  $S^2$  gilt:

- lassen sich in disjunkte Homotopieklassen einteilen (Homotopie ist Äquivalenzrelation)
- Abbildungen innerhalb einer Homotopieklasse lassen sich stetig ineinander verformen
- es existieren abzählbar unendlich viele Homotopieklassen, die sich durch ein  $Q \in \mathbb{Z}$  charakterisieren lassen

Für Abbildungen von  $S^2$  auf  $S^2$  gilt:

- lassen sich in disjunkte Homotopieklassen einteilen (Homotopie ist Äquivalenzrelation)
- Abbildungen innerhalb einer Homotopieklasse lassen sich stetig ineinander verformen
- es existieren abzählbar unendlich viele Homotopieklassen, die sich durch ein  $Q \in \mathbb{Z}$  charakterisieren lassen

Resultat der Homotopie-Analyse

$$\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$$

Topologischer Index:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)} = \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)}^a \phi^a$$

Topologischer Index:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)} = \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)}^a \phi^a \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \left( d^2\xi \frac{1}{2} \epsilon_{rs} \epsilon_{abc} \frac{\partial \phi^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial \phi^c}{\partial \xi^s} \right) \phi^a
 \end{aligned}$$

Topologischer Index:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)} = \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)}^a \phi^a \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \left( d^2\xi \frac{1}{2} \epsilon_{rs} \epsilon_{abc} \frac{\partial\phi^b}{\partial\xi^r} \frac{\partial\phi^c}{\partial\xi^s} \right) \phi^a \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \left( d^2x \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial\xi^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^s}{\partial x^\nu} \right) \epsilon_{abc} \phi^a \frac{\partial\phi^b}{\partial\xi^r} \frac{\partial\phi^c}{\partial\xi^s}
 \end{aligned}$$



Topologischer Index:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)} = \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)}^a \phi^a \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \left( d^2\xi \frac{1}{2} \epsilon_{rs} \epsilon_{abc} \frac{\partial \phi^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial \phi^c}{\partial \xi^s} \right) \phi^a \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \left( d^2x \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^\nu} \right) \epsilon_{abc} \phi^a \frac{\partial \phi^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial \phi^c}{\partial \xi^s} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi^a \frac{\partial \phi^b}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi^c}{\partial x^\nu}
 \end{aligned}$$

Topologischer Index:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)} = \frac{1}{4\pi} \int dS_{(int)}^a \phi^a \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \left( d^2\xi \frac{1}{2} \epsilon_{rs} \epsilon_{abc} \frac{\partial \phi^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial \phi^c}{\partial \xi^s} \right) \phi^a \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \left( d^2x \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^\nu} \right) \epsilon_{abc} \phi^a \frac{\partial \phi^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial \phi^c}{\partial \xi^s} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi^a \frac{\partial \phi^b}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi^c}{\partial x^\nu} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \phi \cdot (\partial_\mu \phi \times \partial_\nu \phi)
 \end{aligned}$$

Betrachte:

$$\int d^2x (\partial_\mu \phi \pm \epsilon_{\mu\nu} \phi \times \partial_\nu \phi) (\partial_\mu \phi \pm \epsilon_{\mu\sigma} \phi \times \partial_\sigma \phi) \geq 0$$

Betrachte:

$$\int d^2x (\partial_\mu \phi \pm \epsilon_{\mu\nu} \phi \times \partial_\nu \phi) (\partial_\mu \phi \pm \epsilon_{\mu\sigma} \phi \times \partial_\sigma \phi) \geq 0$$

$$\int d^2x [(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + \epsilon_{\mu\nu} (\phi \times \partial_\nu \phi) \cdot \epsilon_{\mu\sigma} (\phi \times \partial_\sigma \phi)] \geq$$

$$\geq \pm 2 \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \phi \cdot (\partial_\mu \phi \times \partial_\nu \phi)$$

Betrachte:

$$\int d^2x (\partial_\mu \phi \pm \epsilon_{\mu\nu} \phi \times \partial_\nu \phi) (\partial_\mu \phi \pm \epsilon_{\mu\sigma} \phi \times \partial_\sigma \phi) \geq 0$$

$$\int d^2x [(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + \epsilon_{\mu\nu} (\phi \times \partial_\nu \phi) \cdot \epsilon_{\mu\sigma} (\phi \times \partial_\sigma \phi)] \geq$$

$$\geq \pm 2 \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \phi \cdot (\partial_\mu \phi \times \partial_\nu \phi)$$

Untere Grenze für die Wirkung

$$S_E[\phi] \geq 4\pi|Q|$$

$S_E[\phi]$  wird minimiert gdw.:

(Anti-)Selbstdualitätsgleichung

$$\partial_\mu \phi = \mp \epsilon_{\mu\nu} \phi \times (\partial_\nu \phi)$$

Lösungen dieser Gleichung lösen auch die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \phi &= \pm \epsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) \times (\partial_\nu \phi) \\ &= \epsilon_{\mu\nu} (\epsilon_{\mu\sigma} \phi \times \partial_\sigma \phi) \times \partial_\nu \phi \\ &= \delta_{\nu\sigma} [\partial_\sigma \phi (\phi \partial_\nu \phi) - \phi (\partial_\sigma \phi \cdot \partial_\nu \phi)] \\ &= \phi (\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi) \end{aligned}$$

⇒ Bewegungsgl. (DGL 2. Ordnung) wurde in DGL 1. Ordnung überführt

Projektion von  $S_{int}^2$  auf Ebene:

$$\omega_1 = \frac{2\phi^1}{1 - \phi^3} \quad \omega_2 = \frac{2\phi^2}{1 - \phi^3}$$

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2$$

$$\partial_1 \omega = \left[ \frac{2}{(1 - \phi^3)^2} \right] (\partial_1(\phi_1 + i\phi_2) + (\phi_1 + i\phi_2) \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi_3)$$

Einsetzen von

$$\partial_1(\phi_1 + i\phi_2) = \mp(\phi_1 + i\phi_2) \overleftrightarrow{\partial}_2 \phi_3$$

$$\partial_2(\phi_1 + i\phi_2) = \pm(\phi_1 + i\phi_2) \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi_3$$

$$\Rightarrow \partial_1 \omega_1 = \mp \partial_2 \omega_2 \quad \partial_2 \omega_1 = \pm \partial_1 \omega_2$$

$\Rightarrow$  Cauchy-Riemann Bedingung für analytische Fkt. in  $z = x_1 + ix_2$  bzw.  $z^*$   
 $\Rightarrow$  jede Funktion  $\omega(z)$ , die analytisch in  $z$  ist, löst Bewegungsgl.

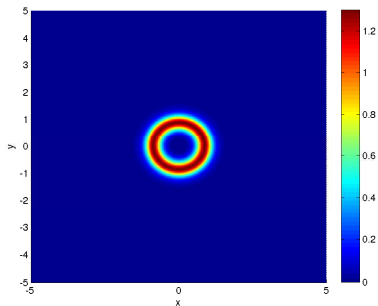
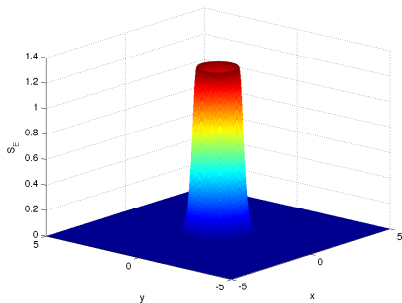
$$\omega(z) = \left( \frac{z - z_0}{\lambda} \right)^n$$

$$S_E = \int d^2x \frac{|d\omega/dz|^2}{(1 + |\omega|^2/4)^2} = \int d^2x \frac{n^2 |z - z_0|^{2n-2} \lambda^{2n}}{(\lambda^{2n} + \frac{1}{4} |z - z_0|^{2n})^2} = 4\pi n$$

Lösungen ex. f. bel.  $z_0, \lambda$  (Translations- und Skaleninvarianz)



$S_E$  für  $n = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $z_0 = 0$



Unter der Ersetzung  $t \rightarrow -i\tau$  ändert sich die Metrik:

$$\text{diag}(1, -1, \dots) \longrightarrow -\text{diag}(1, 1, \dots)$$

Wirkung ist nicht invariant:

$$\Rightarrow S[\phi] = iS_E[\phi]$$

Loops: stetige Abbildungen  $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow X$  auf topologischen Raum  $X$  mit  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \in X$

### Definition

Es seien  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  stetige Loops bei  $x_0 \in X$ .  $\alpha$  und  $\beta$  heißen homotop ( $\alpha \sim \beta$ ), wenn es eine stetige Abbildung  $F : I \times [0, 1] \rightarrow X$  gibt, sodass:

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \alpha(s), & F(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in I \\ F(0, t) &= F(1, t) = x_0 & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

### Präposition

$\alpha \sim \beta$  ist Äquivalenzrelation

$[\alpha]$  bezeichne die Homotopieklasse (Äquivalenzklasse) aller Loops  $\beta$  mit  $\alpha \sim \beta$

## Definition

Es seien  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  stetige Loops bei  $x_0 \in X$ . Das Produkt  $\alpha * \beta$  ist ein Loop definiert durch:

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

## Theorem

*Die Menge aller Äquivalenzklassen von stetigen Loops auf  $X$  bei  $x_0 \in X$ , bildet zusammen mit  $*$  eine Gruppe, die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$ . Die Gruppenoperation ist definiert durch:*

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$

## Theorem

Für wegzusammenhängende topologische Räume  $X$  und  $x_0, x_1 \in X$  gilt:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

## Definition

Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  sind vom selben Homotopietyp, wenn Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  existieren, sodass  $f \circ g \sim id_Y$  und  $g \circ f \sim id_X$ .  $f$  heißt Homotopieäquivalenz.

## Theorem

*Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume vom selben Homotopietyp. Wenn  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz ist*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$$

$\Rightarrow$  Fundamentalgruppe ist invariant unter Homöomorphismen  
(topologische Invariante)

$n$ -Loop: stetige Abbildung  $\alpha : I^n \rightarrow X$  die  $\partial I^n$  auf  $x_0 \in X$  abbilden

### Theorem

Die Menge der Homotopieklassen von  $n$ -Loops bei  $x_0 \in X$  mit  $*$  heißt  $n$ -te Homotopiegruppe  $\pi_n(X, x_0)$ .

Es gilt:  $I^n / \partial I^n \cong S^n$

$\Rightarrow \pi_n(X, x_0)$  ist Homotopiegruppe der Abbildungen  $\alpha : S^n \rightarrow X$

### Einige wichtige Homotopiegruppen

$$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \qquad \pi_n(S^m) \cong \{e\} \text{ für } n < m$$

Was haben wir gemacht?

- $(\mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow) \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2_{(phy)} \xrightarrow{\phi} S^2_{(int)}$
- Bewegungsgleichungen wurden durch topologische Betrachtungen vereinfacht und gelöst




Warum sind Instantonen interessant?

- Instantonen sind führende Terme im Pfadintegral

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

- In der quantisierten Theorie führen Instantonen zu Tunnelphänomenen zw. topologisch unterschiedlichen Vakuumzuständen.



-  R. Rajaraman: Solitons and Instantons, An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory, Elsevier, 1996
-  A. A. Belavin und A. M. Polyakov: Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets, JETP Letters, 1975, Volume 22, p. 245 - 247
-  Nakahara, M: Geometry, Topology and Physics, 2. Auflage, Taylor & Francis Group, 2003